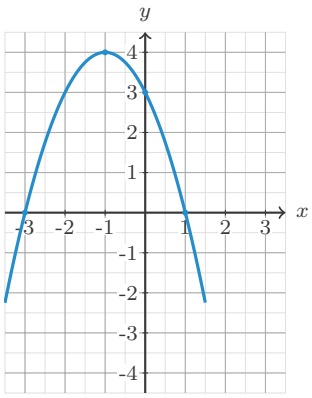
BOLETÍN SA07 - FUNCIONES 02

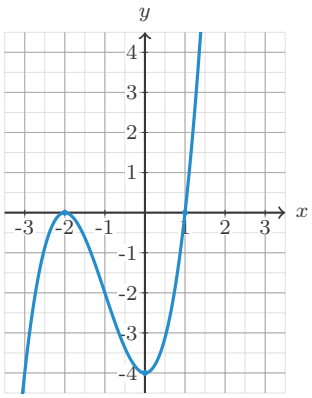
Matemáticas 4.º ESO

Estudia las características de las siguientes funciones.

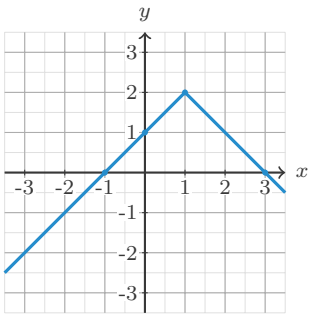
1)



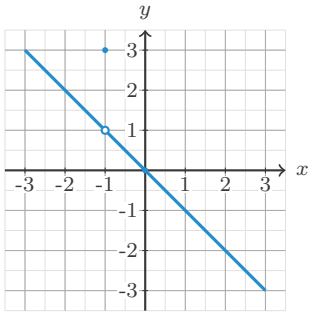
2)



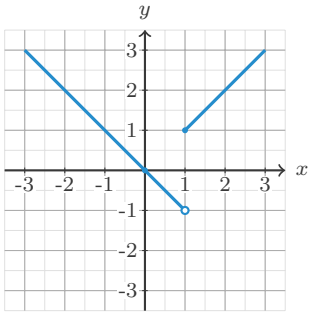
3)



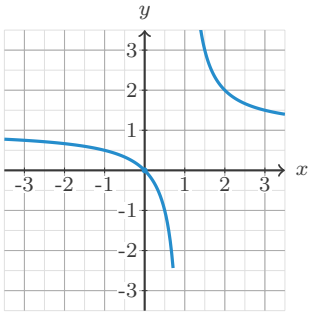
4)



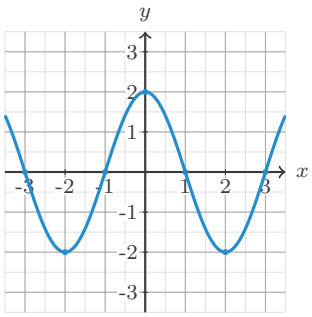
5)



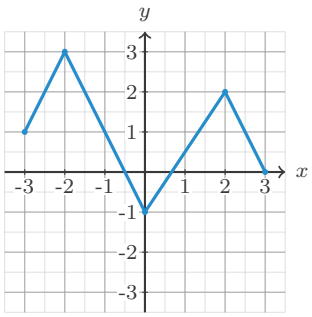
6)



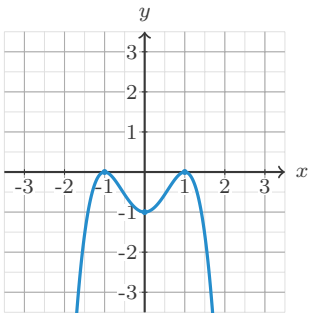
7)



8)



9)



Soluciones

Leyenda para el estudio de las funciones

En cada función se estudiarán, cuando corresponda, las siguientes características:

Dominio	$D(f)$: valores de x para los que existe la función.
Recorrido	$R(f)$: valores de y que toma la función.
Cortes con los ejes	Se indican mediante sus coordenadas (x, y).
Crecimiento	Intervalos en los que la función es creciente.
Decrecimiento	Intervalos en los que la función es decreciente.
Mínimos y máximos	$m_r(x, y)$: mínimo relativo; $m_A(x, y)$: mínimo absoluto; $M_r(x, y)$: máximo relativo; $M_A(x, y)$: máximo absoluto.
Continuidad	Se indicará si es continua o, en caso contrario, dónde y qué tipo de discontinuidad presenta.
Simetría	Par, impar o sin simetría. En las parábolas se indicará además su eje de simetría.
Periodicidad	Si es periódica, se indicará su periodo T.
Asíntotas	AV: asíntota vertical; AH: asíntota horizontal.

1) La gráfica es una parábola abierta hacia abajo.

- Está definida para cualquier número real, por lo que $D(f) = \mathbb{R}$.
- El mayor valor que toma es 4, por lo que $R(f) = (-\infty, 4]$.
- Corta al eje X en $(-3, 0)$ y $(1, 0)$.
- Corta al eje Y en $(0, 3)$.
- Es creciente en $(-\infty, -1)$.
- Es decreciente en $(-1, +\infty)$.
- Tiene un máximo absoluto en $(-1, 4)$: $M_A(-1, 4)$.
- No tiene mínimo.
- Es continua en todo su dominio.
- Su eje de simetría es $x = -1$.
- No es par ni impar y no es periódica.

Resumen: $D = \mathbb{R}$; $R = (-\infty, 4]$; $OX : (-3, 0), (1, 0)$; $OY : (0, 3)$; crece $(-\infty, -1)$; decrece $(-1, +\infty)$; $M_A(-1, 4)$; continua; eje $x = -1$; sin simetría par o impar; no periódica.

2) La gráfica presenta un máximo relativo y un mínimo relativo.

- Está definida para cualquier número real: $D(f) = \mathbb{R}$.
- La función puede tomar cualquier valor real: $R(f) = \mathbb{R}$.
- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

- Corta al eje Y en $(0,-4)$.
- Es creciente en $(-\infty,-2)$ y $(0,+\infty)$.
- Es decreciente en $(-2,0)$.
- Tiene un máximo relativo en $(-2,0)$: $M_r(-2,0)$.
- Tiene un mínimo relativo en $(0,-4)$: $m_r(0,-4)$.
- No presenta máximo absoluto ni mínimo absoluto.
- Es continua en todo su dominio.
- No es par, no es impar y no es periódica.

Resumen: $D=\mathbb{R}$; $R=\mathbb{R}$; $OX:(-2,0),(1,0)$; $OY:(0,-4)$; crece $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$; decrece $(-2,0)$; $M_r(-2,0)$; $m_r(0,-4)$; continua; sin simetría; no periódica.

3) La gráfica está formada por dos semirrectas que se unen en un máximo.

- Está definida para cualquier número real: $D(f)=\mathbb{R}$.
- El mayor valor de la función es 2, por lo que $R(f)=(-\infty,2]$.
- Corta al eje X en $(-1,0)$ y $(3,0)$.
- Corta al eje Y en $(0,1)$.
- Es creciente en $(-\infty,1)$.
- Es decreciente en $(1,+\infty)$.
- Tiene un máximo absoluto en $(1,2)$: $M_A(1,2)$.
- No tiene mínimo.
- Es continua en todo su dominio.
- No es par ni impar y no es periódica.

Resumen: $D=\mathbb{R}$; $R=(-\infty,2]$; $OX:(-1,0),(3,0)$; $OY:(0,1)$; crece $(-\infty,1)$; decrece $(1,+\infty)$; $M_A(1,2)$; continua; sin simetría par o impar; no periódica.

4) La gráfica sigue una recta decreciente, excepto en $x=-1$.

- Existe un valor de la función para cualquier número real, por lo que $D(f)=\mathbb{R}$.
- La recta tendría el valor 1 cuando $x=-1$, pero ese punto está abierto. Por tanto, $R(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
- Corta al eje X y al eje Y en $(0,0)$.
- Es decreciente en $(-\infty,-1)$ y en $(-1,+\infty)$.
- En $x=-1$ aparece un círculo abierto en $(-1,1)$, mientras que el valor de la función es el punto $(-1,3)$.
- Por ello presenta una discontinuidad evitable en $x=-1$.
- El punto aislado $(-1,3)$ constituye un máximo relativo: $M_r(-1,3)$.
- No tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.
- No es par ni impar y no es periódica.

Resumen: $D=\mathbb{R}$; $R=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $OX:(0,0)$; $OY:(0,0)$; decrece $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$; $M_r(-1,3)$; discontinuidad evitable en $x=-1$; sin simetría; no periódica.

5) La función está definida mediante dos tramos distintos.

- Entre ambos tramos existe un valor de la función para todo número real: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Los valores que toma la función son todos los mayores que -1, por lo que $R(f) = (-1, +\infty)$.
- Corta al eje X y al eje Y en $(0, 0)$.
- El tramo de la izquierda es decreciente en $(-\infty, 1)$.
- El tramo de la derecha es creciente en $(1, +\infty)$.
- Al llegar a $x = 1$, el tramo izquierdo termina con un punto abierto en $(1, -1)$, mientras que la función toma el valor 1, representado por el punto cerrado $(1, 1)$.
- Por tanto, presenta una discontinuidad de salto en $x = 1$.
- No presenta máximos ni mínimos.
- No es par ni impar y no es periódica.

Resumen: $D = \mathbb{R}$; $R = (-1, +\infty)$; $OX : (0, 0)$; $OY : (0, 0)$; decrece $(-\infty, 1)$; crece $(1, +\infty)$; sin máximos ni mínimos; discontinuidad de salto en $x = 1$; sin simetría; no periódica.

6) La gráfica está formada por dos ramas y presenta dos asíntotas.

- La función no está definida para $x = 1$, por lo que $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- La función no toma el valor $y = 1$, por lo que $R(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Corta al eje X y al eje Y en $(0, 0)$.
- Es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$.
- No presenta máximos ni mínimos.
- Presenta una discontinuidad infinita en $x = 1$.
- La recta $x = 1$ es una asíntota vertical: $AV : \ x = 1$.
- La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal: $AH : \ y = 1$.
- No es par ni impar.
- No es periódica.

Resumen: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $R = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $OX : (0, 0)$; $OY : (0, 0)$; decrece $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$; sin máximos ni mínimos; discontinuidad infinita en $x = 1$; $AV : x = 1$; $AH : y = 1$; sin simetría par o impar; no periódica.

7) La gráfica repite la misma forma regularmente.

- Está definida para todos los números reales: $D(f) = \mathbb{R}$.
- Sus valores están comprendidos entre -2 y 2: $R(f) = [-2, 2]$.
- En el fragmento representado corta al eje X en $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
- Corta al eje Y en $(0, 2)$.
- Presenta un máximo absoluto en $(0, 2)$, que se repite cada 4 unidades: $M_A(0, 2)$.
- En el fragmento representado aparecen mínimos absolutos en $(-2, -2)$ y $(2, -2)$: $m_A(-2, -2)$ y $m_A(2, -2)$.
- Es creciente, por ejemplo, en $(-2, 0)$ y $(2, 4)$, y estos intervalos se repiten periódicamente.
- Es decreciente, por ejemplo, en $(-4, -2)$ y $(0, 2)$, y estos intervalos también se repiten.

- La distancia horizontal entre dos máximos consecutivos es 4. Por tanto, su periodo es $T = 4$.
- Es continua en todo su dominio.
- Es par, ya que la gráfica es simétrica respecto del eje Y.

Resumen: $D = \mathbb{R}$; $R = [-2, 2]$; $OX : (-3, 0), (-1, 0), (1, 0), (3, 0), \ldots$; $OY : (0, 2)$; $M_A(0, 2), \ldots$; $m_A(-2, -2), m_A(2, -2), \ldots$; continua; par; periódica con $T = 4$.

8) La función está formada por varios segmentos rectos unidos.

- La gráfica comienza en $x = -3$ y termina en $x = 3$, con ambos extremos incluidos: $D(f) = [-3, 3]$.
- El menor valor es -1 y el mayor es 3, por lo que $R(f) = [-1, 3]$.
- Corta al eje X en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(3, 0)$.
- Corta al eje Y en $(0, -1)$.
- Es creciente en $(-3, -2)$ y $(0, 2)$.
- Es decreciente en $(-2, 0)$ y $(2, 3)$.
- Tiene un máximo absoluto en $(-2, 3)$: $M_A(-2, 3)$.
- Tiene un mínimo absoluto en $(0, -1)$: $m_A(0, -1)$.
- Tiene además un máximo relativo en $(2, 2)$: $M_r(2, 2)$.
- Es continua en todo su dominio.
- No es par ni impar y no es periódica.

Resumen: $D = [-3, 3]$; $R = [-1, 3]$; $OX : \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, 0\right), (3, 0)$; $OY : (0, -1)$; crece $(-3, -2) \cup (0, 2)$; decrece $(-2, 0) \cup (2, 3)$; $M_A(-2, 3)$; $m_A(0, -1)$; $M_r(2, 2)$; continua; sin simetría; no periódica.

9) La gráfica presenta dos máximos y un mínimo relativo central.

- Está definida para cualquier número real: $D(f) = \mathbb{R}$.
- El mayor valor de la función es 0, por lo que $R(f) = (-\infty, 0]$.
- Corta al eje X en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
- Corta al eje Y en $(0, -1)$.
- Es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$.
- Es decreciente en $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$.
- Tiene dos máximos absolutos: $M_A(-1, 0)$ y $M_A(1, 0)$.
- Tiene un mínimo relativo en $(0, -1)$: $m_r(0, -1)$.
- No tiene mínimo absoluto.
- Es continua en todo su dominio.
- Es par, ya que la gráfica es simétrica respecto del eje Y.
- No es periódica.

Resumen: $D = \mathbb{R}$; $R = (-\infty, 0]$; $OX : (-1, 0), (1, 0)$; $OY : (0, -1)$; crece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; decrece $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$; $M_A(-1, 0)$; $M_A(1, 0)$; $m_r(0, -1)$; continua; par; no periódica.