BOLETÍN 03 PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS 04

Matemáticas · 3.º ESO

1) Calcula el término general de la progresión aritmética $8, 13, 18, 23, \ldots$ y utiliza el resultado para hallar a_{27}.

2) En un cine, la primera fila dispone de 16 butacas y cada fila siguiente tiene 4 butacas más que la anterior. ¿Cuántas butacas tendrá la fila 17?

3) Determina si la sucesión $2, 8, 32, 128, \ldots$ es una progresión geométrica. Si lo es, calcula su término general y el término a_6.

4) En un experimento se detectan 45 partículas en la primera observación y en cada observación posterior se registra el triple que en la anterior. ¿Cuántas partículas se registrarán en la quinta observación?

5) En una progresión aritmética se conocen $a_3 = 13$ y $a_{10} = 48$. Calcula la diferencia, el primer término, el término general y a_{22}.

6) Una persona deposita 5,50 € en una hucha la primera semana y aumenta el depósito semanal en 2,50 € cada semana. ¿Cuánto depositará durante la semana 14? ¿Cuánto habrá depositado en total durante las 14 primeras semanas?

7) En una progresión geométrica de razón positiva se conocen $a_2 = 18$ y $a_5 = 486$. Calcula la razón, el primer término, el término general y a_8.

8) Un material tiene una masa de 1024 g en la primera medición. En cada medición posterior conserva exactamente la mitad de la masa de la medición anterior. ¿Qué masa tendrá en la sexta medición?

9) Calcula la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética $4, 10, 16, 22, \ldots$.

10) Una decoración contiene 52 piezas en la primera fila y cada fila siguiente tiene 3 piezas menos que la anterior. Si hay 12 filas, ¿cuántas piezas tendrá la última fila? ¿Cuántas piezas habrá en total?

BOLETÍN 03 PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS 04

Matemáticas · 3.º ESO

11) Calcula el término general de la progresión aritmética $90, 82, 74, 66, \ldots$ y, a partir de él, calcula a_{16}.

12) Una biblioteca coloca 30 libros en la primera balda de una exposición y 7 libros más en cada balda siguiente. Si utiliza 15 baldas, ¿cuántos libros tendrá la última? ¿Cuántos libros habrá colocado en total?

13) Determina si la sucesión $243, 81, 27, 9, \ldots$ es una progresión geométrica. Si lo es, calcula su término general y el término a_8.

14) Una publicación recibe 3 reacciones durante su primera hora. En cada hora siguiente recibe cuatro veces tantas reacciones como en la anterior. ¿Cuántas recibirá durante la sexta hora?

15) En una progresión aritmética se conocen $a_4 = 20$ y $a_{12} = 52$. Calcula la diferencia, el primer término y la suma de los 12 primeros términos.

16) Un senderista recorre 9 km el primer día y aumenta el recorrido diario en 1,25 km cada día. ¿Qué distancia recorrerá el día 16? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en total durante los 16 días?

17) En una progresión geométrica de razón positiva se conocen $a_3 = 36$ y $a_6 = 972$. Calcula la razón, el primer término, el término general y a_8.

18) Una pelota alcanza 486 cm en su primer rebote y en cada rebote posterior alcanza las dos terceras partes de la altura anterior. ¿Qué altura alcanzará en el sexto rebote?

19) Calcula la suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = -15$ y $d = 6$.

20) Una inversión tiene un valor inicial de 200 €. Al finalizar cada periodo, su valor pasa a ser $1,25$ veces el del periodo anterior. Considerando el valor inicial como primer término, ¿qué valor tendrá en el quinto término de la progresión?

Soluciones

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Suma de los n primeros términos:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Suma de los n primeros términos:

$S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$

1)

Las diferencias entre términos consecutivos son:

$13 - 8 = 5, \qquad 18 - 13 = 5, \qquad 23 - 18 = 5$

Por tanto, $a_1 = 8$ y $d = 5$.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = 8 + (n-1) \cdot 5 = 8 + 5n - 5 = 5n + 3$

Utilizamos el término general obtenido:

$a_{27} = 5 \cdot 27 + 3 = 135 + 3 = 138$

$a_n = 5n + 3$ **y** $a_{27} = 138$

2)

Cada fila tiene 4 butacas más que la anterior. Por tanto, las cantidades forman una progresión aritmética con $a_1 = 16$ *y* $d = 4$.

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sustituimos $n = 17$:

$a_{17} = 16 + (17-1) \cdot 4 = 16 + 64 = 80$

La fila 17 tendrá 80 butacas.

3)

Los cocientes entre términos consecutivos son:
$\frac{8}{2} = 4, \qquad \frac{32}{8} = 4, \qquad \frac{128}{32} = 4$
Por tanto, es una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

$a_n = 2 \cdot 4^{\,n-1}$

Utilizamos el término general para calcular a_6:

$a_6 = 2 \cdot 4^{6-1} = 2 \cdot 4^5 = 2 \cdot 1024 = 2048$

$\boxed{a_n = 2 \cdot 4^{\,n-1} \textbf{ y } a_6 = 2048}$

4)

En cada observación se registra el triple de partículas que en la anterior. Es una progresión geométrica con $a_1 = 45$ *y* $r = 3$.
Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos $n = 5$:

$a_5 = 45 \cdot 3^{5-1} = 45 \cdot 3^4 = 45 \cdot 81 = 3645$

$\boxed{\textbf{En la quinta observación se registrarán 3645 partículas.}}$

5)

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Con $a_3 = 13$:

$13 = a_1 + 2d$

Con $a_{10} = 48$:

$48 = a_1 + 9d$

Restamos ambas igualdades:

$48 - 13 = 7d$

$35 = 7d \qquad \Longrightarrow \qquad d = 5$

Sustituimos para obtener el primer término:

$13 = a_1 + 2 \cdot 5$

$13 = a_1 + 10 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 3$

Calculamos el término general:

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$

Utilizamos ese término general:

$a_{22} = 5 \cdot 22 - 2 = 110 - 2 = 108$

$\boxed{d = 5,\ a_1 = 3,\ a_n = 5n - 2 \textbf{ y } a_{22} = 108}$

6)

El depósito semanal aumenta siempre en 2,50 €. Es una progresión aritmética con $a_1 = 5,5$ *y* $d = 2,5$.
Para calcular el depósito de la semana 14:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sustituimos:

$a_{14} = 5,5 + (14-1) \cdot 2,5 = 5,5 + 32,5 = 38$

Para calcular el total depositado:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{14} = \frac{(5,5 + 38) \cdot 14}{2} = \frac{43,5 \cdot 14}{2} = 304,5$$

En la semana 14 depositará 38 € y en total habrá depositado 304,50 €.

7)

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Con $a_2 = 18$:

$18 = a_1 r$

Con $a_5 = 486$:

$486 = a_1 r^4$

Dividimos ambas igualdades:

$$\frac{486}{18} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r}$$

$27 = r^3 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 3$

Calculamos el primer término:

$18 = 3a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 6$

Obtenemos el término general:

$a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$

Lo utilizamos para calcular a_8:

$a_8 = 6 \cdot 3^{8-1} = 6 \cdot 3^7 = 6 \cdot 2187 = 13\,122$

$r = 3$, $a_1 = 6$, $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$ **y** $a_8 = 13\,122$

8)

En cada medición queda la mitad de la masa anterior. Por tanto, es una progresión geométrica con $a_1 = 1024$ *y* $r = \frac{1}{2}$.
Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos $n = 6$:

$a_6 = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_6 = 1024 \cdot \frac{1}{32} = 32$

En la sexta medición la masa será de 32 g.

9)

La progresión tiene $a_1 = 4$ y $d = 6$.
Calculamos primero el término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = 4 + (n-1) \cdot 6 = 4 + 6n - 6 = 6n - 2$

Utilizamos el término general para calcular a_{20}:

$a_{20} = 6 \cdot 20 - 2 = 120 - 2 = 118$

Aplicamos la fórmula de la suma:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{20} = \frac{(4 + 118) \cdot 20}{2} = \frac{122 \cdot 20}{2} = 1220$

$S_{20} = 1220$

10)

Cada fila tiene 3 piezas menos que la anterior. Las cantidades forman una progresión aritmética con $a_1 = 52$ *y* $d = -3$.
Calculamos las piezas de la última fila:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{12} = 52 + (12-1)(-3) = 52 - 33 = 19$

Para obtener el total:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{12} = \frac{(52 + 19) \cdot 12}{2} = \frac{71 \cdot 12}{2} = 426$

La última fila tendrá 19 piezas y la decoración tendrá 426 piezas en total.

11)

Las diferencias entre términos consecutivos son:

$82 - 90 = -8, \qquad 74 - 82 = -8, \qquad 66 - 74 = -8$

Por tanto, $a_1 = 90$ y $d = -8$.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = 90 + (n-1)(-8) = 90 - 8n + 8 = 98 - 8n$

Utilizamos el término general:

$a_{16} = 98 - 8 \cdot 16 = 98 - 128 = -30$

$\boxed{a_n = 98 - 8n \text{ y } a_{16} = -30}$

12)

Cada balda contiene 7 libros más que la anterior. Las cantidades forman una progresión aritmética con $a_1 = 30$ *y* $d = 7$.

Calculamos el número de libros de la última balda:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{15} = 30 + (15-1) \cdot 7 = 30 + 98 = 128$

Para calcular el total:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{15} = \dfrac{(30 + 128) \cdot 15}{2} = \dfrac{158 \cdot 15}{2} = 1185$

La última balda tendrá 128 libros y en total se habrán colocado 1185 libros.

13)

Los cocientes entre términos consecutivos son:

$\dfrac{81}{243} = \dfrac{1}{3}, \qquad \dfrac{27}{81} = \dfrac{1}{3}, \qquad \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$

Por tanto, es una progresión geométrica con $a_1 = 243$ y $r = \frac{1}{3}$.

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

$a_n = 243 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

Utilizamos el término general:

$a_8 = 243 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{8-1} = 243 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7}$

$a_8 = 243 \cdot \dfrac{1}{2187} = \dfrac{1}{9}$

$\boxed{a_n = 243\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ y } a_8 = \dfrac{1}{9}}$

14)

Cada hora recibe cuatro veces tantas reacciones como en la anterior. Por tanto, es una progresión geométrica con $a_1 = 3$ *y* $r = 4$.

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos $n = 6$:

$a_6 = 3 \cdot 4^{6-1} = 3 \cdot 4^5 = 3 \cdot 1024 = 3072$

Durante la sexta hora la publicación recibirá 3072 reacciones.

15)

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Con $a_4 = 20$:

$20 = a_1 + 3d$

Con $a_{12} = 52$:

$52 = a_1 + 11d$

Restamos ambas igualdades:

$52 - 20 = 8d$

$32 = 8d \qquad \Longrightarrow \qquad d = 4$

Sustituimos:

$20 = a_1 + 3 \cdot 4$

$20 = a_1 + 12 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 8$

Aplicamos la fórmula de la suma:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{12} = \dfrac{(8 + 52) \cdot 12}{2} = \dfrac{60 \cdot 12}{2} = 360$

$d = 4$**,** $a_1 = 8$ **y** $S_{12} = 360$

16)

La distancia aumenta 1,25 km cada día. Por tanto, las distancias forman una progresión aritmética con $a_1 = 9$ *y* $d = 1,25$.
Calculamos la distancia del día 16:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{16} = 9 + (16-1) \cdot 1,25 = 9 + 18,75 = 27,75$

Para calcular la distancia total:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{16} = \dfrac{(9 + 27,75) \cdot 16}{2} = \dfrac{36,75 \cdot 16}{2} = 294$

El día 16 recorrerá 27,75 km y durante los 16 días habrá recorrido 294 km.

17)

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Con $a_3 = 36$:

$36 = a_1 r^2$

Con $a_6 = 972$:

$972 = a_1 r^5$

Dividimos ambas igualdades:

$\dfrac{972}{36} = \dfrac{a_1 r^5}{a_1 r^2}$

$27 = r^3 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 3$

Calculamos el primer término:

$36 = a_1 \cdot 3^2$

$36 = 9a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 4$

Obtenemos el término general:

$a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

Lo utilizamos para calcular a_8:

$a_8 = 4 \cdot 3^{8-1} = 4 \cdot 3^7 = 4 \cdot 2187 = 8748$

$r = 3$**,** $a_1 = 4$**,** $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ **y** $a_8 = 8748$

18)

Cada rebote alcanza las dos terceras partes de la altura del anterior. Por tanto, las alturas forman una progresión geométrica con $a_1 = 486$ *y* $r = \frac{2}{3}$.
Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos $n = 6$:

$a_6 = 486 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{6-1} = 486 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$

$a_6 = 486 \cdot \frac{32}{243} = 64$

En el sexto rebote la pelota alcanzará 64 cm.

19)

Tenemos $a_1 = -15$ y $d = 6$.
Calculamos primero el término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = -15 + (n-1) \cdot 6 = -15 + 6n - 6 = 6n - 21$

Utilizamos el término general para obtener a_{20}:

$a_{20} = 6 \cdot 20 - 21 = 120 - 21 = 99$

Aplicamos la fórmula de la suma:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{20} = \frac{(-15 + 99) \cdot 20}{2} = \frac{84 \cdot 20}{2} = 840$

$S_{20} = 840$

20)

El valor se multiplica por $1,25$ *en cada periodo. Por tanto, los valores forman una progresión geométrica con* $a_1 = 200$ *y* $r = 1,25$.
Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos $n = 5$:

$a_5 = 200 \cdot 1,25^{5-1} = 200 \cdot 1,25^4$

$a_5 = 200 \cdot 2,44140625 = 488,28125$

Redondeamos a céntimos:

$a_5 \approx 488,28$

En el quinto término la inversión tendrá un valor aproximado de 488,28 €.