BOLETÍN 03 PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS 01

Matemáticas · 3.º ESO

1) Determina si la sucesión $5, 9, 13, 17, \ldots$ es una progresión aritmética. Si lo es, calcula su término general y el término a_{20}.

2) En un teatro, la primera fila tiene 18 asientos y cada fila siguiente tiene 2 asientos más que la anterior. ¿Cuántos asientos tendrá la fila 15?

3) Determina si la sucesión $3, 6, 12, 24, \ldots$ es una progresión geométrica. Si lo es, calcula su término general y el término a_{10}.

4) En un cultivo, la primera medición registra 250 microorganismos y en cada medición posterior la cantidad es triple que en la anterior. ¿Cuántos microorganismos habrá en la séptima medición?

5) En una progresión aritmética se sabe que $a_4 = 11$ y $a_{12} = 35$. Calcula la diferencia, el primer término y el término a_{20}.

6) Una persona ahorra 4 € la primera semana y cada semana ahorra 3 € más que la semana anterior. ¿Cuánto ahorrará en la semana 12? ¿Cuánto habrá ahorrado en total durante las 12 primeras semanas?

7) En una progresión geométrica de razón positiva se sabe que $a_2 = 10$ y $a_5 = 80$. Calcula la razón, el primer término y el término a_8.

8) Una pelota alcanza 486 cm en su primer rebote. En cada rebote posterior alcanza las dos terceras partes de la altura anterior. ¿Qué altura alcanzará en el sexto rebote?

9) Calcula la suma de los 18 primeros términos de la progresión aritmética $7, 12, 17, 22, \ldots$.

10) Un corredor recorre 2 km el primer día de entrenamiento y aumenta la distancia diaria en 0,5 km cada día. ¿Qué distancia recorrerá el día 14? ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en total durante los 14 días?

BOLETÍN 03 - PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS 01

Matemáticas · 3.º ESO

11) Determina si la sucesión $24, 19, 14, 9, \ldots$ es una progresión aritmética. Si lo es, calcula su término general y el término a_{25}.

12) En un auditorio, la primera fila tiene 26 butacas y cada nueva fila tiene 3 butacas más que la anterior. Si hay 20 filas, ¿cuántas butacas tiene la última fila? ¿Cuántas butacas hay en total?

13) Determina si la sucesión $81, 27, 9, 3, \ldots$ es una progresión geométrica. Si lo es, calcula su término general y el término a_7.

14) En una campaña, 2 personas reciben inicialmente un mensaje y cada una de ellas hace que en el siguiente nivel haya tres veces más personas que en el anterior. ¿Cuántas personas habrá en el sexto nivel?

15) En una progresión aritmética se sabe que $a_6 = 31$ y $a_{15} = 67$. Calcula el primer término, la diferencia y la suma de los 15 primeros términos.

16) Un vivero coloca 120 plantas en la primera hilera y 8 plantas más en cada hilera siguiente. Si prepara 20 hileras, ¿cuántas plantas habrá en la última? ¿Cuántas plantas habrá utilizado en total?

17) En una progresión geométrica de razón positiva se conocen $a_3 = 24$ y $a_6 = 192$. Calcula la razón, el primer término y el término a_9.

18) Una publicación recibe 5 compartidos durante el primer día y cada día siguiente recibe cuatro veces tantos como el día anterior. ¿Cuántos compartidos recibirá el sexto día?

19) Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética $-4, 2, 8, 14, \ldots$.

20) Una inversión vale 500 € al comenzar el seguimiento. Al final de cada año su valor es 1,2 veces el del año anterior. Considerando el valor inicial como primer término, ¿qué valor tendrá al finalizar el quinto año?

Soluciones

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Suma de los n primeros términos:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Suma de los n primeros términos:

$S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$

1)

Las diferencias entre términos consecutivos son:

$9 - 5 = 4, \qquad 13 - 9 = 4, \qquad 17 - 13 = 4$

Por tanto, es una progresión aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 4$.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$

Como ya conocemos el término general, lo utilizamos para calcular a_{20}:

$a_{20} = 4 \cdot 20 + 1 = 80 + 1 = 81$

$a_n = 4n + 1$ **y** $a_{20} = 81$

2)

El número de asientos aumenta siempre en 2. Por tanto, las filas forman una progresión aritmética con $a_1 = 18$ *y* $d = 2$.

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sustituimos $n = 15$, $a_1 = 18$ y $d = 2$:

$a_{15} = 18 + (15-1) \cdot 2 = 18 + 28 = 46$

La fila 15 tendrá 46 asientos.

3)

Los cocientes entre términos consecutivos son:
$\frac{6}{3} = 2, \qquad \frac{12}{6} = 2, \qquad \frac{24}{12} = 2$
Por tanto, es una progresión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = 2$.

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

$a_n = 3 \cdot 2^{\,n-1}$

Como ya conocemos el término general:

$a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$

$\boxed{a_n = 3 \cdot 2^{\,n-1} \textbf{ y } a_{10} = 1536}$

4)

Cada medición tiene el triple de microorganismos que la anterior. Es una progresión geométrica con $a_1 = 250$ *y* $r = 3$.
Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos los datos:

$a_7 = 250 \cdot 3^{7-1} = 250 \cdot 3^6$

$a_7 = 250 \cdot 729 = 182\,250$

$\boxed{\textbf{En la séptima medición habrá 182 250 microorganismos.}}$

5)

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Con $a_4 = 11$:

$11 = a_1 + (4-1)d = a_1 + 3d$

Con $a_{12} = 35$:

$35 = a_1 + (12-1)d = a_1 + 11d$

Restamos las dos igualdades:

$35 - 11 = 8d$

$24 = 8d \qquad \Longrightarrow \qquad d = 3$

Sustituimos en $11 = a_1 + 3d$:

$11 = a_1 + 9 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 2$

Ahora obtenemos el término general:

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

Y utilizamos ese término general para calcular a_{20}:

$a_{20} = 3 \cdot 20 - 1 = 60 - 1 = 59$

$\boxed{d = 3,\ a_1 = 2,\ a_n = 3n - 1 \textbf{ y } a_{20} = 59}$

6)

Los ahorros semanales aumentan siempre en 3 €. Forman una progresión aritmética con $a_1 = 4$ *y* $d = 3$.
Para calcular lo que ahorra en una semana concreta utilizamos:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sustituimos $n = 12$:

$a_{12} = 4 + (12-1) \cdot 3 = 4 + 33 = 37$

Para calcular lo ahorrado durante las 12 primeras semanas usamos:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Sustituimos:

$S_{12} = \dfrac{(4+37) \cdot 12}{2} = \dfrac{41 \cdot 12}{2} = 246$

En la semana 12 ahorrará 37 € y en total habrá ahorrado 246 €.

7)

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Con $a_2 = 10$:

$10 = a_1 r$

Con $a_5 = 80$:

$80 = a_1 r^4$

Dividimos las dos igualdades:

$\dfrac{80}{10} = \dfrac{a_1 r^4}{a_1 r}$

$8 = r^3 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 2$

Sustituimos en $10 = a_1 r$:

$10 = 2a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 5$

Obtenemos el término general:

$a_n = 5 \cdot 2^{\,n-1}$

Y lo utilizamos para calcular a_8:

$a_8 = 5 \cdot 2^{8-1} = 5 \cdot 2^7 = 5 \cdot 128 = 640$

$r = 2$**,** $a_1 = 5$**,** $a_n = 5 \cdot 2^{\,n-1}$ **y** $a_8 = 640$

8)

Cada rebote alcanza las dos terceras partes de la altura del anterior. Las alturas forman una progresión geométrica con $a_1 = 486$ *y* $r = \frac{2}{3}$.
Utilizamos la fórmula:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos:

$a_6 = 486 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}$

$a_6 = 486 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5} = 486 \cdot \frac{32}{243} = 64$

En el sexto rebote la pelota alcanzará 64 cm.

9)

La progresión tiene $a_1 = 7$ y $d = 5$.
Calculamos primero su término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = 7 + (n-1) \cdot 5 = 7 + 5n - 5 = 5n + 2$

Utilizamos el término general para obtener a_{18}:

$a_{18} = 5 \cdot 18 + 2 = 90 + 2 = 92$

Ahora aplicamos la fórmula de la suma:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{18} = \frac{(7 + 92) \cdot 18}{2} = \frac{99 \cdot 18}{2} = 891$

$S_{18} = 891$

10)

La distancia aumenta 0,5 km cada día. Es una progresión aritmética con $a_1 = 2$ *y* $d = 0,5$.
Para calcular la distancia recorrida un día concreto:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sustituimos $n = 14$:

$a_{14} = 2 + (14-1) \cdot 0,5 = 2 + 6,5 = 8,5$

Para calcular la distancia total utilizamos:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{14} = \frac{(2 + 8,5) \cdot 14}{2} = \frac{10,5 \cdot 14}{2} = 73,5$

El día 14 recorrerá 8,5 km y en total habrá recorrido 73,5 km.

11)

Las diferencias entre términos consecutivos son:

$19 - 24 = -5, \qquad 14 - 19 = -5, \qquad 9 - 14 = -5$

Por tanto, es una progresión aritmética con $a_1 = 24$ y $d = -5$.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = 24 + (n-1)(-5) = 24 - 5n + 5 = 29 - 5n$

Utilizamos el término general:

$a_{25} = 29 - 5 \cdot 25 = 29 - 125 = -96$

$\boxed{a_n = 29 - 5n \text{ y } a_{25} = -96}$

12)

Cada fila tiene 3 butacas más que la anterior. Por tanto, $a_1 = 26$ *y* $d = 3$.
Calculamos primero el número de butacas de una fila cualquiera:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sustituimos $n = 20$:

$a_{20} = 26 + (20-1) \cdot 3 = 26 + 57 = 83$

Para obtener el número total de butacas utilizamos:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{20} = \dfrac{(26 + 83) \cdot 20}{2} = \dfrac{109 \cdot 20}{2} = 1090$

La última fila tendrá 83 butacas y el auditorio tendrá 1090 butacas en total.

13)

Los cocientes entre términos consecutivos son:

$\dfrac{27}{81} = \dfrac{1}{3}, \qquad \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}, \qquad \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

Por tanto, es una progresión geométrica con $a_1 = 81$ y $r = \frac{1}{3}$.

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

$a_n = 81 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

Utilizamos el término general:

$a_7 = 81 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7-1} = 81 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{6}$

$a_7 = 81 \cdot \dfrac{1}{729} = \dfrac{1}{9}$

$\boxed{a_n = 81\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ y } a_7 = \dfrac{1}{9}}$

14)

En cada nivel hay tres veces tantas personas como en el anterior. Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 2$ *y* $r = 3$.

Utilizamos la fórmula:

$a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$

Sustituimos $n = 6$:

$a_6 = 2 \cdot 3^{6-1} = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$

En el sexto nivel habrá 486 personas.

15)

Utilizamos el término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Con $a_6 = 31$:

$31 = a_1 + 5d$

Con $a_{15} = 67$:

$67 = a_1 + 14d$

Restamos:

$67 - 31 = 9d$

$36 = 9d \qquad \Longrightarrow \qquad d = 4$

Sustituimos:

$31 = a_1 + 5 \cdot 4$

$31 = a_1 + 20 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 11$

Para calcular la suma:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{15} = \dfrac{(11 + 67) \cdot 15}{2} = \dfrac{78 \cdot 15}{2} = 585$

$a_1 = 11$**,** $d = 4$ **y** $S_{15} = 585$

16)

Cada hilera tiene 8 plantas más que la anterior. Las cantidades forman una progresión aritmética con $a_1 = 120$ *y* $d = 8$.

Calculamos primero la cantidad de plantas de una hilera cualquiera:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sustituimos $n = 20$:

$a_{20} = 120 + (20-1) \cdot 8 = 120 + 152 = 272$

Para calcular todas las plantas utilizadas:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(120 + 272) \cdot 20}{2} = \frac{392 \cdot 20}{2} = 3920$$

La última hilera tendrá 272 plantas y se utilizarán 3920 plantas en total.

17)

Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Con $a_3 = 24$:

$24 = a_1 r^2$

Con $a_6 = 192$:

$192 = a_1 r^5$

Dividimos las dos igualdades:

$$\frac{192}{24} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2}$$

$8 = r^3 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 2$

Calculamos a_1:

$24 = a_1 \cdot 2^2$

$24 = 4a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 6$

Por tanto, el término general es:

$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$

Lo utilizamos para calcular a_9:

$a_9 = 6 \cdot 2^{9-1} = 6 \cdot 2^8 = 6 \cdot 256 = 1536$

$r = 2$**,** $a_1 = 6$**,** $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$ **y** $a_9 = 1536$

18)

Cada día hay cuatro veces tantos compartidos como el día anterior. Es una progresión geométrica con $a_1 = 5$ *y* $r = 4$.
Utilizamos la fórmula:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Sustituimos $n = 6$:

$a_6 = 5 \cdot 4^{6-1} = 5 \cdot 4^5 = 5 \cdot 1024 = 5120$

El sexto día la publicación recibirá 5120 compartidos.

19)

La progresión tiene $a_1 = -4$ y $d = 6$.
Calculamos el término general:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = -4 + (n-1) \cdot 6 = -4 + 6n - 6 = 6n - 10$

Utilizamos el término general para obtener a_{25}:

$a_{25} = 6 \cdot 25 - 10 = 150 - 10 = 140$

Ahora calculamos la suma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{25} = \frac{(-4 + 140) \cdot 25}{2} = \frac{136 \cdot 25}{2} = 1700$$

$S_{25} = 1700$

20)

El valor inicial es el primer término y al terminar cada año el valor se multiplica por $1,2$. *Por tanto,* $a_1 = 500$ *y* $r = 1,2$.
Utilizamos la fórmula del término general:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Como el valor inicial es a_1, al finalizar el primer año tenemos a_2. Por tanto, al finalizar el quinto año corresponde a_6.
Sustituimos:

$a_6 = 500 \cdot 1,2^{6-1}$

$a_6 = 500 \cdot 1,2^5 = 500 \cdot 2,48832 = 1244,16$

Al finalizar el quinto año la inversión tendrá un valor de 1244,16 €.