BOLETÍN 02 - PROPORCIONALIDAD SIMPLE Y COMPUESTA 02

Matemáticas · 4.º ESO

A. Proporcionalidad directa

1) En una frutería, 3,5 kg de naranjas cuestan 8,75 €. ¿Cuánto costarán 6,2 kg al mismo precio por kilogramo?

2) Una impresora industrial produce 480 páginas en 8 minutos. ¿Cuántas páginas imprimirá en 30 minutos manteniendo el mismo ritmo?

3) En un mapa, 4 cm representan 26 km en la realidad. ¿Qué distancia real representan 11 cm?

4) Con 2,4 litros de pintura se cubren 18 m^2. ¿Cuántos litros serán necesarios para pintar 45 m^2?

B. Proporcionalidad inversa

5) Dieciocho trabajadores tardan 14 días en terminar una obra. ¿Cuántos días necesitarán 12 trabajadores al mismo ritmo?

6) Nueve bombas iguales vacían un depósito en 8 horas. ¿Cuánto tardarán 6 bombas iguales?

7) Un vehículo realiza un recorrido en 5 horas circulando a una velocidad media de 72 km/h. ¿Cuánto tardará si circula a 90 km/h?

8) Quince máquinas idénticas completan un trabajo en 6 horas. ¿Cuánto tardarán 10 máquinas en realizar el mismo trabajo?

C. Repartos directamente proporcionales

9) Se reparten 2 100 € entre tres proyectos en proporción a las puntuaciones 2, 5 y 7. ¿Cuánto recibe cada proyecto?

10) Tres trabajadores reciben conjuntamente una gratificación de 1 980 € proporcional a 3, 4 y 5 jornadas extraordinarias. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

11) Tres bibliotecas reciben 3 600 libros en proporción al número de usuarios: 150, 250 y 500. ¿Cuántos libros recibe cada biblioteca?

12) Un fondo de 1 680 € se distribuye entre tres asociaciones en proporción a 4, 6 y 11. ¿Qué cantidad corresponde a cada una?

D. Repartos inversamente proporcionales

13) Se reparten 1 320 € entre tres equipos de forma inversamente proporcional al número de días empleados en una tarea: 2, 3 y 6 días. ¿Cuánto recibe cada equipo?

14) Un premio de 1 800 € se distribuye entre tres participantes de forma inversamente proporcional a sus tiempos: 3, 4 y 12 minutos. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

15) Se reparten 1 440 puntos entre tres grupos de forma inversamente proporcional al número de incidencias registradas: 4, 6 y 12. ¿Cuántos puntos recibe cada grupo?

16) Una bonificación de 2 600 € se reparte entre tres máquinas de forma inversamente proporcional a sus tiempos de parada: 5, 7 y 35 horas. ¿Qué cantidad corresponde a cada una?

E. Proporcionalidad compuesta

17) Seis trabajadores, trabajando 5 horas al día durante 12 días, fabrican 900 piezas. ¿Cuántas piezas fabricarán 10 trabajadores trabajando 6 horas al día durante 9 días?

18) Ocho máquinas, funcionando 7 horas diarias durante 4 días, producen 5 600 unidades. ¿Cuántas unidades producirán 12 máquinas funcionando 5 horas diarias durante 6 días?

19) Para alimentar a 90 personas durante 20 días se necesitan 540 kg de alimentos. ¿Cuántos kilogramos se necesitarán para alimentar a 150 personas durante 12 días?

20) Quince operarios construyen 840 m de una conducción trabajando 14 días a razón de 8 horas diarias. ¿Cuántos operarios serán necesarios para construir 1 080 m en 12 días trabajando 9 horas diarias?

Soluciones

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al aumentar una, la otra aumenta en la misma proporción; y al disminuir una, la otra también disminuye.

Si a se corresponde con b, y c con x:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad a \cdot x = b \cdot c \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{b \cdot c}{a}.$$

También puede utilizarse la constante de proporcionalidad:

$$\frac{y}{x} = k.$$

Las magnitudes homólogas deben ocupar siempre la misma posición.

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando, al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción.

Si a se corresponde con b, y c con x, el producto permanece constante:

$$a \cdot b = c \cdot x \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Por tanto:

$$x \cdot y = k.$$

Si una magnitud se multiplica por un número, la otra se divide por ese mismo número.

REPARTOS PROPORCIONALES

Reparto directamente proporcional. Si una cantidad total T debe repartirse en proporción a a, b y c:

$$k = \frac{T}{a + b + c}.$$

Las partes son:

$$ak, \qquad bk, \qquad ck.$$

Reparto inversamente proporcional. Primero sustituimos los números por sus inversos:

$$\frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{b}, \qquad \frac{1}{c}.$$

Después realizamos un reparto directamente proporcional a esos inversos. Cuando sea posible, los transformamos en una razón entera equivalente para facilitar los cálculos.

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA · MÉTODO DE LOS FACTORES

En una proporcionalidad compuesta intervienen **tres o más magnitudes**. Para resolverla podemos pensar el problema como una **cadena de cambios**: partimos del valor conocido de la magnitud que buscamos y vamos modificando, una a una, las demás condiciones.

No necesitamos construir de memoria una proporción complicada. Para cada magnitud hacemos siempre la misma pregunta:

> **Si solo cambiara esta magnitud y las demás permanecieran iguales, ¿la incógnita tendría que aumentar o disminuir?**

A partir de esa respuesta construimos un factor.

Si la incógnita debe aumentar, colocamos los datos de manera que el factor sea mayor que 1:

$$\frac{\text{nuevo}}{\text{antiguo}}.$$

Si la incógnita debe disminuir, colocamos los datos de manera que el factor sea menor que 1:

$$\frac{\text{antiguo}}{\text{nuevo}}.$$

Ejemplo.
4 máquinas fabrican 600 piezas trabajando 5 horas al día durante 3 días. ¿Cuántas piezas fabricarán 6 máquinas trabajando 8 horas al día durante 5 días?

Buscamos **piezas**, así que partimos de las 600 piezas iniciales.

$$600$$

Cambiamos primero el número de máquinas. De 4 pasamos a 6. Más máquinas producen más piezas, así que necesitamos un factor mayor que 1:

$$600 \cdot \frac{6}{4}.$$

Ahora cambiamos las horas diarias. De 5 pasamos a 8. Más horas producen más piezas, así que añadimos otro factor mayor que 1:

$$600 \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{5}.$$

Finalmente cambiamos los días. De 3 pasamos a 5. Más días producen más piezas, por lo que añadimos:

$$600 \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{3}.$$

Solo al final simplificamos y calculamos:

$$600 \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{3} = 600 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2400.$$

La expresión completa recoge todos los cambios. **No calculamos resultados intermedios ni pasamos a decimales**: vamos acumulando los factores y simplificamos al final.

Podemos recordar el procedimiento así:

$$\boxed{\text{valor inicial} \cdot \text{factor 1} \cdot \text{factor 2} \cdots = \text{valor final}}$$

Proporcionalidad directa

1) El peso y el precio son directamente proporcionales.

$$\frac{3{,}5}{8{,}75} = \frac{6{,}2}{x}$$

$$3{,}5x = 8{,}75 \cdot 6{,}2$$

$$x = \frac{8{,}75 \cdot 6{,}2}{3{,}5} = 15{,}50$$

Los 6,2 kg costarán 15,50 €.

2) El tiempo de funcionamiento y el número de páginas son directamente proporcionales.

$$\frac{8}{480} = \frac{30}{x}$$

$$8x = 480 \cdot 30$$

$$x = \frac{480 \cdot 30}{8} = 1800$$

En 30 minutos imprimirá 1 800 páginas.

3) La distancia en el mapa y la distancia real son directamente proporcionales.

$$\frac{4}{26} = \frac{11}{x}$$

$$4x = 26 \cdot 11$$

$$x = \frac{26 \cdot 11}{4} = 71{,}5$$

Los 11 cm representan 71,5 km.

4) La superficie y la cantidad de pintura son directamente proporcionales.

$$\frac{18}{2{,}4} = \frac{45}{x}$$

$$18x = 2{,}4 \cdot 45$$

$$x = \frac{2{,}4 \cdot 45}{18} = 6$$

Serán necesarios 6 litros de pintura.

Proporcionalidad inversa

5) Menos trabajadores implican más días. Es una proporcionalidad inversa.

$18 \cdot 14 = 12 \cdot x$

$x = \dfrac{18 \cdot 14}{12} = 21$

Los 12 trabajadores necesitarán 21 días.

6) Menos bombas implican más tiempo.

$9 \cdot 8 = 6 \cdot x$

$x = \dfrac{9 \cdot 8}{6} = 12$

Las 6 bombas tardarán 12 horas.

7) Al aumentar la velocidad disminuye el tiempo.

$72 \cdot 5 = 90 \cdot x$

$x = \dfrac{72 \cdot 5}{90} = 4$

El recorrido se realizará en 4 horas.

8) Menos máquinas implican más tiempo.

$15 \cdot 6 = 10 \cdot x$

$x = \dfrac{15 \cdot 6}{10} = 9$

Las 10 máquinas tardarán 9 horas.

Repartos directamente proporcionales

9) El reparto es proporcional a $2 : 5 : 7$.

$2 + 5 + 7 = 14$

$k = \dfrac{2100}{14} = 150$

$2 \cdot 150 = 300, \qquad 5 \cdot 150 = 750, \qquad 7 \cdot 150 = 1050$

Reciben 300 €, 750 € y 1 050 €, respectivamente.

10) El reparto es proporcional a $3 : 4 : 5$.

$3 + 4 + 5 = 12$

$k = \dfrac{1980}{12} = 165$

$3 \cdot 165 = 495, \qquad 4 \cdot 165 = 660, \qquad 5 \cdot 165 = 825$

Reciben 495 €, 660 € y 825 €, respectivamente.

11) El reparto es proporcional a $150 : 250 : 500$.

$150 + 250 + 500 = 900$

$k = \dfrac{3600}{900} = 4$

$150 \cdot 4 = 600, \qquad 250 \cdot 4 = 1000, \qquad 500 \cdot 4 = 2000$

Reciben 600, 1 000 y 2 000 libros, respectivamente.

12) El reparto es proporcional a $4 : 6 : 11$.

$4 + 6 + 11 = 21$

$k = \dfrac{1680}{21} = 80$

$4 \cdot 80 = 320, \qquad 6 \cdot 80 = 480, \qquad 11 \cdot 80 = 880$

Corresponden 320 €, 480 € y 880 €, respectivamente.

Repartos inversamente proporcionales

13) Tomamos los inversos de $2, 3, 6$:
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$
Multiplicamos por 6 para obtener una razón entera equivalente:

$3 : 2 : 1$

$3 + 2 + 1 = 6$

$k = \frac{1320}{6} = 220$

$3 \cdot 220 = 660, \qquad 2 \cdot 220 = 440, \qquad 1 \cdot 220 = 220$

Reciben 660 €, 440 € y 220 €, respectivamente.

14) Tomamos los inversos de $3, 4, 12$:
$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{12}$
Multiplicamos por 12:

$4 : 3 : 1$

$4 + 3 + 1 = 8$

$k = \frac{1800}{8} = 225$

$4 \cdot 225 = 900, \qquad 3 \cdot 225 = 675, \qquad 1 \cdot 225 = 225$

Reciben 900 €, 675 € y 225 €, respectivamente.

15) Tomamos los inversos de $4, 6, 12$:
$\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{12}$
Multiplicamos por 12:

$3 : 2 : 1$

$3 + 2 + 1 = 6$

$k = \frac{1440}{6} = 240$

$3 \cdot 240 = 720, \qquad 2 \cdot 240 = 480, \qquad 1 \cdot 240 = 240$

Reciben 720, 480 y 240 puntos, respectivamente.

16) Tomamos los inversos de $5, 7, 35$:
$\frac{1}{5} : \frac{1}{7} : \frac{1}{35}$
Multiplicamos por 35:

$7 : 5 : 1$

$7 + 5 + 1 = 13$

$k = \frac{2600}{13} = 200$

$7 \cdot 200 = 1400, \qquad 5 \cdot 200 = 1000, \qquad 1 \cdot 200 = 200$

Corresponden 1 400 €, 1 000 € y 200 €, respectivamente.

Proporcionalidad compuesta · método de los factores

17) Buscamos el número de piezas. Partimos de las 900 piezas iniciales.

Trabajadores: de 6 a 10. Más trabajadores ⇒ más piezas.

$$900 \cdot \frac{10}{6}$$

Horas diarias: de 5 a 6. Más horas ⇒ más piezas. Acumulamos el nuevo factor:

$$900 \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{6}{5}$$

Días: de 12 a 9. Menos días ⇒ menos piezas.

$$x = 900 \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{12}$$

Simplificamos únicamente al final:

$$x = 900 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} = 1350$$

Fabricarán 1 350 piezas.

18) Buscamos el número de unidades producidas. Partimos de las 5 600 unidades iniciales.

Máquinas: de 8 a 12. Más máquinas ⇒ más unidades.

$$5600 \cdot \frac{12}{8}$$

Horas diarias: de 7 a 5. Menos horas ⇒ menos unidades.

$$5600 \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{5}{7}$$

Días: de 4 a 6. Más días ⇒ más unidades.

$$x = 5600 \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{4}$$

Simplificamos al final:

$$x = 5600 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} = 9000$$

Producirán 9 000 unidades.

19) Buscamos los kilogramos de alimentos. Partimos de los 540 kg iniciales.

Personas: de 90 a 150. Más personas ⇒ más alimentos.

$$540 \cdot \frac{150}{90}$$

Días: de 20 a 12. Menos días ⇒ menos alimentos.

$$x = 540 \cdot \frac{150}{90} \cdot \frac{12}{20}$$

Simplificamos todos los factores juntos:

$$x = 540 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 540$$

Serán necesarios 540 kg de alimentos.

20) Buscamos el número de operarios. Partimos de los 15 operarios iniciales.

Metros: de 840 a 1 080. Más metros ⇒ más operarios.

$$15 \cdot \frac{1080}{840}$$

Días: de 14 a 12. Menos días disponibles ⇒ más operarios.

$$15 \cdot \frac{1080}{840} \cdot \frac{14}{12}$$

Horas diarias: de 8 a 9. Más horas de trabajo cada día ⇒ menos operarios.

$$x = 15 \cdot \frac{1080}{840} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{8}{9}$$

Ahora simplificamos todos los factores juntos:

$$x = 15 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{9} = 20$$

Serán necesarios 20 operarios.